Commentary

コウホート分析の古今
一般化線形混合モデルとしてのコウホートモデル

中村 隆
情報・システム研究機構 統計数理研究所 名誉教授

1 コウホート分析

コウホート分析（cohort analysis）は，継続調査（反復横断調査）から得られる何らかの調査項目の年齢区分×調査時点形式の集計表データから，年齢・時代・コウホート（世代）効果を分離しようとする統計的方法である。3効果がうまく分離できれば，社会の変化の構造に関する知見が得られ，将来の予測に資することができる（Ryder, 1965; Fienberg and Mason, 1985; Glenn, 2005）。

しかしながらコウホート分析には，何らかの付加条件を与えなければ3効果を分離できないという識別問題が存在し，付加条件の与え方とその評価を巡って長年にわたり議論が続けられてきた。近年の成書に，Yang and Land（2013），O'Brien（2015），Fu（2018）がある。

コウホート分析の識別問題を筆者が知ったのは院生の頃に読んだ安田（1969）によってであったが，後に統計数理研究所に入ってコウホート分析の方法の研究に携わるとは思ってもいなかった。ちなみに，安田（1969, pp.271-273）に，Blalock（1967）が挙げたコウホート分析も含む4つの社会学的な識別問題が紹介されている。

筆者が統計数理研究所に入所したのは1979年，「日本人の国民性調査」の第6次全国調査（1978年）が実施されてから半年後である。集計作業を手伝いながらコウホート分析に取り組むことになった。『第4日本人の国民性』（統計数理研究所国民性調査委員会，1982）の第Ⅳ章§2.1「歳，世代，時勢 ――コホート分析」で，西平は第6次調査までに典型的な変化をした調査項目の推移を図示して，年齢・時勢・世代要因と国民性の変化の関係について論じている。筆者の最初のベイズ型コウホートモデルの論文（中村，1982）もこの頃である。

2 コホートとコウホート

コウホート（cohort）は，語源的には，ローマ時代の軍団の1単位のことであり，転じて人口学，疫学，医学，政治学，社会学等の分野で，人生のある契機（出生，就職，結婚など）を同時期に経験した集団のことを指すようになった。何も冠さなければ同時出生集団（birth cohort）を意味し，例えば団塊世代というときの世代とほぼ同義である。

ところでcohortの音訳である。1980年当時は「コーホート」「コホート」が一般的であった。成書や辞典における1966～2001年にかけてのこれらの出現について福田（2002）がまとめている（重松（2002）も参照）。「コホート」はないかなと考え，筆者は「コウホート」で出発することにした（中村，1982）。福田がまとめた表の期間内ではあるものの残念ながら「コウホート」は載っていない（1998年の行に「コゥホート」がある）。ちなみに2018年某日，Google検索すると，「コホート」約465,000件，「コーホート」約62,900件，「コウホート」約3,390件と出る。

3 標準コウホート表

継続調査から得られる年齢区分×調査時点形式の集計表は，コウホート分析の観点から「コウホート表」と呼ばれる。年齢区分幅と調査実施間隔が等しい場合（たとえば，5歳幅と5年間隔）は特に「標準コウホート表」と言う。標準コウホート表の具体的な説明は本稿では省略する（たとえば，中村（1982, 2018）にある）。

標準以外の表は「一般コウホート表」と呼ばれ，年齢区分幅が調査実施間隔と一致しなかったり，調査実施間隔が不規則だったり，年齢区分幅が調査年によって変化したりする場合に得られる。コウホートモデルの対象は標準表データに限らないが，本稿では以下，標準コウホート表を想定する。

さて，標準表データについて特徴的なことは，年齢区分数をI，調査時点数をJとするとき，表に自然に現れるコウホート区分数が$K=I+J-1$となることである。また，第j調査時点の第i年齢区分（(i,j)セルと呼ぶ）が第kコウホート区分に対応し，

$$k=k(i,j)=j-i+I, \tag{1}$$

という関係（「出生年＝調査年－年齢」のインデックス版）があることである。この関係$k(i,j)$が正にコウホート分析における識別問題の源泉である。

4 コウホートモデル

標準コウホート表における(i,j)セルの何らか集計項目の期待値をリンク関数で変換したη_{ij}を，コウホートモデルは次のように分解する。

$$\eta_{ij}=\beta^G+\beta_i^A+\beta_j^P+\beta_k^C, \tag{2}$$

$$i=1,\dots,I;\ j=1,\dots,J;\ k=k(i,j)=1,\dots,K.$$

ここで，β^Gは総平均効果，$\beta_i^A,\beta_j^P,\beta_k^C$はそれぞれ年齢，時代，コウホート効果である。

パラメータたち$\{\eta_{ij}\},\{\beta_i^A\},\{\beta_j^P\},\{\beta_k^C\}$をベクトルに配したものをそれぞれ$\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\beta}^A,\boldsymbol{\beta}^P,\boldsymbol{\beta}^C$とし，$\beta^G$, $\boldsymbol{\beta}^A$, $\boldsymbol{\beta}^P$, $\boldsymbol{\beta}^C$に対応するデザイン行列をそれぞれ$\mathbf{1}_{IJ},\boldsymbol{X}_A,\boldsymbol{X}_P,\boldsymbol{X}_C$とすると，モデル（2）は，

$$\boldsymbol{\eta}=\beta^G\mathbf{1}_{IJ}+\boldsymbol{X}_A\boldsymbol{\beta}^A+\boldsymbol{X}_P\boldsymbol{\beta}^P+\boldsymbol{X}_C\boldsymbol{\beta}^C, \tag{3}$$

と書くことができる。クロネッカ積と直和（付録B）を用いれば，$\boldsymbol{E}$を単位行列として，

$$\mathbf{1}_{IJ}=\mathbf{1}_J\otimes\mathbf{1}_I,\ \boldsymbol{X}_A=\mathbf{1}_J\otimes\boldsymbol{E}_I,\ \boldsymbol{X}_P=\boldsymbol{E}_J\otimes\mathbf{1}_I,$$
$$\boldsymbol{X}_C=(\oplus_j\,\breve{\boldsymbol{E}}_{I\times K}\boldsymbol{N}_K^{j-1})(\mathbf{1}_J\otimes\boldsymbol{E}_K),$$

と与えられる。ここで，$\boldsymbol{X}_C$には（A1）の拡張反単位行列$\breve{\boldsymbol{E}}_{a\times b}$と（A2）のシフト行列$\boldsymbol{N}_a$を使っている。デザイン行列のより具体的な表示は中村（2005）を，$\boldsymbol{X}_C$の新しい表現は坂口・中村（2019）を参照。

3要因のデザイン行列はカテゴリカル変数についてのもので，各行のどこかに1が立ち，横方向に足せば1だから，

$$\boldsymbol{X}_A\mathbf{1}_I=\boldsymbol{X}_P\mathbf{1}_J=\boldsymbol{X}_C\mathbf{1}_K=\mathbf{1}_{IJ}, \tag{4}$$

となっている。このため，$\{\beta_i^A\},\{\beta_j^P\},\{\beta_k^C\}$はそれぞれ適当なゼロ和制約を満たすよう基準化しておく。たとえば，

$$\mathbf{1}_I'\boldsymbol{\beta}^A=\mathbf{1}_J'\boldsymbol{\beta}^P=\mathbf{1}_K'\boldsymbol{\beta}^C=0, \tag{5}$$

である（ここで，$\mathbf{1}_I'\boldsymbol{\beta}^A=\sum\beta_i^A$であり，効果パラメータの和である）。

5 コウホート分析における識別問題

さて，適当な次元の（A3）のインデックスベクトル$\boldsymbol{n}_a$を各デザイン行列に右からかけると，

$$\boldsymbol{X}_A\boldsymbol{n}_I=(\mathbf{1}_J\otimes\boldsymbol{E}_I)(1\otimes\boldsymbol{n}_I)=\mathbf{1}_J\otimes\boldsymbol{n}_I,$$
$$\boldsymbol{X}_P\boldsymbol{n}_J=(\boldsymbol{E}_J\otimes\mathbf{1}_I)(\boldsymbol{n}_J\otimes 1)=\boldsymbol{n}_J\otimes\mathbf{1}_I,$$

また，

$$\breve{\boldsymbol{E}}_{I\times K}\boldsymbol{N}_K^{j-1}\boldsymbol{n}_K=\breve{\boldsymbol{E}}_{I\times K}[\boldsymbol{n}_{j:K}',\mathbf{0}_{j-1}']'=\breve{\boldsymbol{E}}_I\boldsymbol{n}_{j:(j+I-1)}$$
$$=\boldsymbol{n}_{(I+j-1):-1:j}=(I+j)\mathbf{1}_I-\boldsymbol{n}_I,$$

であるから（最後のところで（A4）を使った），（B1）より，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{X}_C\boldsymbol{n}_K &= (\oplus_j \check{\boldsymbol{E}}_{I\times K}\boldsymbol{N}_K^{j-1})(\mathbf{1}_J \otimes \boldsymbol{E}_K)\boldsymbol{n}_K\\
&= (\oplus_j \check{\boldsymbol{E}}_{I\times K}\boldsymbol{N}_K^{j-1}\boldsymbol{n}_K)(\mathbf{1}_J \otimes 1)\\
&= \{\oplus_j (I\mathbf{1}_I + j\mathbf{1}_I - \boldsymbol{n}_I)\}\mathbf{1}_J\\
&= I(\mathbf{1}_J \otimes \mathbf{1}_I) + (\boldsymbol{n}_J \otimes \mathbf{1}_I) - (\mathbf{1}_J \otimes \boldsymbol{n}_I)\\
&= I\mathbf{1}_{IJ} + \boldsymbol{X}_P\boldsymbol{n}_J - \boldsymbol{X}_A\boldsymbol{n}_I,
\end{aligned}
$$

と得られ，結局，

$$\boldsymbol{X}_A\boldsymbol{n}_I - \boldsymbol{X}_P\boldsymbol{n}_J + \boldsymbol{X}_C\boldsymbol{n}_K = I\mathbf{1}_{IJ},$$

となることがわかる。これと，インデックス間の関係（1）による$i-j+k=I$とを，プラスマイナスの対応も含めて見比べてほしい。

さらに，中心化したインデックスベクトル（A5）を代わりに用いると，

$$\boldsymbol{X}_A\boldsymbol{n}_I^* - \boldsymbol{X}_P\boldsymbol{n}_J^* + \boldsymbol{X}_C\boldsymbol{n}_K^* = \mathbf{0}_{IJ}, \tag{6}$$

となることが示せる。

つづけて，下付ダガー（†）の3効果のパラメータを導入し，

$$\boldsymbol{\beta}_\dagger^A = \boldsymbol{\beta}^A + s\boldsymbol{n}_I^*,\ \boldsymbol{\beta}_\dagger^P = \boldsymbol{\beta}^P - s\boldsymbol{n}_J^*,\ \boldsymbol{\beta}_\dagger^C = \boldsymbol{\beta}^C + s\boldsymbol{n}_K^*, \tag{7}$$

とおく。$s\neq 0$であれば，$\boldsymbol{\beta}_\dagger^A \neq \boldsymbol{\beta}^A$，$\boldsymbol{\beta}_\dagger^P \neq \boldsymbol{\beta}^P$，$\boldsymbol{\beta}_\dagger^C \neq \boldsymbol{\beta}^C$であるが，任意の$s$について，（6）より，

$$
\begin{aligned}
&\beta^G\mathbf{1}_{IJ} + \boldsymbol{X}_A\boldsymbol{\beta}_\dagger^A + \boldsymbol{X}_P\boldsymbol{\beta}_\dagger^P + \boldsymbol{X}_C\boldsymbol{\beta}_\dagger^C\\
&\qquad = \boldsymbol{\eta} + s(\boldsymbol{X}_A\boldsymbol{n}_I^* - \boldsymbol{X}_P\boldsymbol{n}_J^* + \boldsymbol{X}_C\boldsymbol{n}_K^*) = \boldsymbol{\eta},
\end{aligned}
$$

となり，無数のダガーパラメータの組$\{\boldsymbol{\beta}_\dagger^A, \boldsymbol{\beta}_\dagger^P, \boldsymbol{\beta}_\dagger^C\}$が(3)と同じ$\boldsymbol{\eta}$を与えることがわかる。逆に見れば，ある$\boldsymbol{\eta}$に対して無数の$\{\boldsymbol{\beta}^A, \boldsymbol{\beta}^P, \boldsymbol{\beta}^C\}$への分解があることを示している。これが「コウホート分析における識別問題」である。

6 パラメータの漸進的変化の条件

ダガーの組（7）をあらためて考えてみる。たとえばベクトル$s\boldsymbol{n}_I^*$のI個の要素は切片0，傾きsの直線上に並ぶから，未知の真値の組$\{\boldsymbol{\beta}_0^A, \boldsymbol{\beta}_0^P, \boldsymbol{\beta}_0^C\}$に対して$s$を動かすと，ダガーの組は，いわばA, P, Cという名前の付いた3つの連動するシーソーの上に真値の組の値が乗っているが如くの動きを見せることになる。$|s|\to\infty$とすれば3連のシーソーはどれもほとんど垂直に立ってしまうわけで，そうではない（動きが小さく節約的であろう）真値の組に対して傾き$s=0$となるダガーの組を探したいということになる。

未知の真値に対して，

$$\boldsymbol{\beta}_\dagger^A = \boldsymbol{\beta}_0^A + s\boldsymbol{n}_I^*, \tag{8}$$

を考えれば，その第i要素は，

$$\beta_{\dagger,i}^A = \beta_{0,i}^A + s\left(i - \frac{I+1}{2}\right),$$

である。階差をとると，

$$\beta_{\dagger,i}^A - \beta_{\dagger,i+1}^A = (\beta_{0,i}^A - \beta_{0,i+1}^A) - s,$$

であり，$i=1,\ldots,I-1$について平方和を考えると，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{I-1}\left(\beta_{\dagger,i}^A - \beta_{\dagger,i+1}^A\right)^2\\
&\quad = \sum_{i=1}^{I-1}\left(\beta_{0,i}^A - \beta_{0,i+1}^A\right)^2 - 2(\beta_{0,1}^A - \beta_{0,I}^A)s + (I-1)s^2,
\end{aligned}
$$

となる。他の2効果についても同様の平方和を考え，3つの平方和の和（sの2次関数となる）を最小にすれば，$s=0$となる真値の組が得られだろうと期待できる。

3効果の平方和に対する重みを別々にし（ダガーを省いて），

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\sigma_A^2}\sum_{i=1}^{I-1}\left(\beta_i^A - \beta_{i+1}^A\right)^2 + \frac{1}{\sigma_P^2}\sum_{j=1}^{J-1}\left(\beta_j^P - \beta_{j+1}^P\right)^2\\
&\qquad + \frac{1}{\sigma_C^2}\sum_{k=1}^{K-1}\left(\beta_k^C - \beta_{k+1}^C\right)^2 \quad\to\quad \min,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

とするのが，「パラメータの漸進的変化の条件」（隣り合うパラメータの1次階差の重み付き2乗和を最小にする条件）と呼ぶものである。重みの逆数であるσ_A^2たちは，パラメータ$\{\beta_i^A\}$たちの動きを制御するパラメータなので，後に超パラメータと呼ばれることになる。

“漸進的”という言葉でよく誤解されるが超パラメータの値を大きくとれば，βたちは大きく動くことができる。パラメータの漸進的変化の条件は，常にβたちの動きを小さく制限するような条件ではないことは断っておきたい。

階差パラメータたちを

$$\delta_i^A = \beta_i^A - \beta_{i+1}^A,\ \delta_j^P = \beta_j^P - \beta_{j+1}^P,\ \delta_k^C = \beta_k^C - \beta_{k+1}^C,$$

とおき，$\{\delta_i^A\}$, $\{\delta_j^P\}$, $\{\delta_k^C\}$をベクトルに配したものをそれぞれ$\boldsymbol{\delta}^A$, $\boldsymbol{\delta}^P$, $\boldsymbol{\delta}^C$とし，まとめて$\boldsymbol{\delta}_* = [(\boldsymbol{\delta}^A)', (\boldsymbol{\delta}^P)', (\boldsymbol{\delta}^C)']'$とおく。また，

$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_A^2, \sigma_P^2, \sigma_C^2]'$, および,

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\sigma}) = (\sigma_A^2 \boldsymbol{E}_{I-1}) \oplus (\sigma_P^2 \boldsymbol{E}_{J-1}) \oplus (\sigma_C^2 \boldsymbol{E}_{K-1}), \quad (10)$$

とおけば，パラメータの漸進的変化の条件（9）は，正規分布の密度関数を利用して，

$$\pi(\boldsymbol{\delta}_*|\boldsymbol{\sigma}) = (2\pi)^{-\frac{L}{2}}|\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\delta}_*'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\delta}_*\right) \to \max, \quad (11)$$

と表すことができる。ここで，

$L = (I-1) + (J-1) + (K-1)$は階差パラメータの全要素数である。

7　ベイズ型コウホート（BAPC）モデル

前節で，階差パラメータ$\boldsymbol{\delta}^A$たちを導入した。付録Cの階差行列を用いると，$\boldsymbol{\delta}^A = \boldsymbol{D}_I\boldsymbol{\beta}^A$, と表すことができ，これを$\boldsymbol{\beta}^A$について解けば，(C1)より，

$$\boldsymbol{\beta}^A = \boldsymbol{D}_I^-\boldsymbol{\delta}^A + \alpha^A \mathbf{1}_I, \quad (12)$$

を得る。ここで，α^Aはゼロ和制約（5）を満たすように定める。他の階差パラメータについても同様にすると，コウホートモデル（3）は，

$$\boldsymbol{\eta} = \delta^G \mathbf{1}_{IJ} + \boldsymbol{X}_A\boldsymbol{D}_I^-\boldsymbol{\delta}^A + \boldsymbol{X}_P\boldsymbol{D}_J^-\boldsymbol{\delta}^P + \boldsymbol{X}_C\boldsymbol{D}_K^-\boldsymbol{\delta}^C,$$

となる。ここで，$\delta^G = \beta^G + \alpha^A + \alpha^P + \alpha^C$である。

尤度関数を一般化線形モデル（generalized linear model, GLM）を想定して定める。分析対象とするアウトカム$\boldsymbol{y}$に仮定する確率分布に基づく尤度関数を$f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\delta}_*, \boldsymbol{\varphi})$とする。ここで，$\boldsymbol{\varphi}$は先の階差パラメータ$\boldsymbol{\delta}_*$と$\boldsymbol{\sigma}$以外の$\delta^G$等から成るものとする。

パラメータの漸進的変化の条件である（11）をパラメータ$\boldsymbol{\delta}_*$の事前密度とし，尤度関数との積を作れば，事後密度に比例する，$f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\delta}_*, \boldsymbol{\varphi})\ \pi(\boldsymbol{\delta}_*|\boldsymbol{\sigma})$, が得られ，ベイズ型モデルが構成できる。$\boldsymbol{\sigma}$は超パラメータ・ベクトルとなる。

パラメータの推定は，まず，周辺尤度の最大化，

$$L_{\mathrm{marginal}}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varphi}) = \int f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\delta}_*, \boldsymbol{\varphi})\ \pi(\boldsymbol{\delta}_*|\boldsymbol{\sigma})\ \mathrm{d}\boldsymbol{\delta}_* \to \max,$$

により，$\hat{\boldsymbol{\sigma}}$, $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$を決める。次に，これらを所与とした事後尤度関数最大化，

$$f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\delta}_*, \hat{\boldsymbol{\varphi}})\ \pi(\boldsymbol{\delta}_*|\hat{\boldsymbol{\sigma}}) \to \max,$$

により$\hat{\boldsymbol{\delta}}_*$を求める（maximum a posteriori estimte, MAP推定値）。効果パラメータの推定値$\{\hat{\beta}^G, \hat{\boldsymbol{\beta}}^A, \hat{\boldsymbol{\beta}}^P, \hat{\boldsymbol{\beta}}^C\}$はゼロ和制約（5）を満たすよう（12）等により行う。

推定法の考え方は以上の通りであるが，実際は$\boldsymbol{\sigma}$を与えて$\hat{\boldsymbol{\delta}}_*$, $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$を求め，ラプラス近似により$L_{\mathrm{marginal}}(\boldsymbol{\sigma}, \hat{\boldsymbol{\varphi}})$を得る。これを目的関数（超パラメータ$\boldsymbol{\sigma}$の関数）として最大化問題を解くことにより$\hat{\boldsymbol{\sigma}}$を推定する（同時に，$\hat{\boldsymbol{\delta}}_*$, $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$は得られていることになる。詳細については中村（2005）を参照）。

比較すべきモデルとしては，無効果のGモデル，単効果のA, P, Cモデル，2効果のAP, PC, ACモデル，そして3効果のAPCモデルの8モデルがひとまず考えられる。これらの比較には，赤池のベイズ型情報量規準ABIC（ベイズ型モデルのAIC）を用いる（Akaike, 1980）。ABICは，最大対数周辺尤度に基づき，

$$\mathrm{ABIC} = -2\log L_{\mathrm{marginal}}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \hat{\boldsymbol{\varphi}}) + 2h,$$

で定義される。ここでhは周辺尤度関数のパラメータ数であり，$\boldsymbol{\sigma}$と$\boldsymbol{\varphi}$の要素数の合計である。ABICが小さいほどよいモデルである。

8　集計データと個票データ

以上で説明してきたのは，集計データである年齢区分×調査時点形式のコウホート表データを前提としたコウホート分析モデルである。

統計数理研究所に入所して，継続調査の個票データを扱うことはもちろんできたが，研究所の大型計算機は当時としては最新のものであっても現在に比べれば非力であり，コウホート分析の対象は集計データのことしか考えていな

かった。その当時の文献もすべて集計データを対象としていた。

年齢・時代・世代要因しか扱わないのであれば，集計データと個票データに対する統計モデルの尤度関数（の核）は同じになるから，3効果の推定値は同じになる。ただし，集計データに対するモデル（ロジットモデル）は母集団割合の変化についてのものであり，個票データに対するモデル（ロジスティック回帰モデル）は個人の正反応確率のものであるという違いは残る。

9 階層的年齢·時代·世代（HAPC）モデル

やがて，継続調査の個票データの蓄積と利用環境の整備が進み，計算機の能力も飛躍的に増大し，統計モデルも発展して，Yang and Land（2006）の登場をみる。個票データを対象としたマルチレベル分析モデルに基づく階層的年齢・時代・世代（Hierarchical age-period-cohort, HAPC）モデルである。

マルチレベル分析の枠組みは，個人が属する集団（コウホート分析の文脈では，年齢，時点，コウホート）を階層と見なすという点で理解しやすい。HAPCモデルはこのような点で今日の標準的コウホート分析モデルの地位を得ているともいえるが，得られるコウホート効果の形状を見ると，想定する以上にトレンドがフラット（傾きが水平傾向）になることが指摘されている（Bell and Jones, 2014）。また，階層概念に捕らわれ，年齢，時点，コウホートという3つの階層に個人が属するとは考えにくい（どれか2つを指定すればもう1つが決まってしまう）ので，年齢は個人の属性とし，階層とはしないことが通常行われる（このこともコウホート効果のトレンドの水平傾向をもたらす）。

10 線形混合モデルとしてのコウホートモデル

マルチレベル分析も含む線形混合モデル（linear mixed model, LMM）は，一般に，

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{Zb} + \boldsymbol{\epsilon}, \quad \boldsymbol{\epsilon} \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{R}), \quad \boldsymbol{b} \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}), \quad (13)$$

と書くことができる。$\boldsymbol{\beta}$が固定効果，$\boldsymbol{b}$が変量効果である。

HAPCモデル（と同等の集計データ版）とBAPCモデルを，線形混合モデルの枠組みで比較すると，

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{1}_{IJ}, \quad \boldsymbol{R} = \sigma^2\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = (10)\text{式},$$

は共通として，HAPCモデルは，

$$\boldsymbol{\beta} = \beta^G,\ \boldsymbol{Z} = [\boldsymbol{X}_A, \boldsymbol{X}_P, \boldsymbol{X}_C],\ \boldsymbol{b} = [(\boldsymbol{\beta}^A)', (\boldsymbol{\beta}^P)', (\boldsymbol{\beta}^C)']',$$

ととったもの。一方のBAPCモデルは，

$$\boldsymbol{\beta} = \delta^G, \quad \boldsymbol{Z} = [\boldsymbol{X}_A\boldsymbol{D}_I^-, \boldsymbol{X}_P\boldsymbol{D}_J^-, \boldsymbol{X}_C\boldsymbol{D}_K^-],$$

$$\boldsymbol{b}(= \boldsymbol{\delta}_*) = [(\boldsymbol{\delta}^A)', (\boldsymbol{\delta}^P)', (\boldsymbol{\delta}^C)']',$$

ととったものになる。変量効果を3効果のパラメータそのものにするか，3効果の階差パラメータにするかが異なる。

（13）のLMMの尤度関数（の核）をLとすれば，

$$\log L = -\frac{1}{2}\log|\boldsymbol{R}| - \frac{1}{2}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{Zb})'\boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{Zb})$$
$$-\frac{1}{2}\log|\boldsymbol{G}| - \frac{1}{2}\boldsymbol{b}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{b},$$

である。BAPCモデルの場合，$\boldsymbol{b}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\delta}_*'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\delta}_*$であるからこの項はパラメータの漸進的変化の条件そのものであり，最尤法の罰則項として働いているとみることができる。

さらに，対数尤度関数は，

$$\log L = -\frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\boldsymbol{X} & \boldsymbol{Z}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}\\ \boldsymbol{b}\end{bmatrix}\right\}'\begin{bmatrix}\boldsymbol{R} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{\Sigma}\end{bmatrix}^{-1}$$
$$\left\{\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\boldsymbol{X} & \boldsymbol{Z}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}\\ \boldsymbol{b}\end{bmatrix}\right\} - \frac{1}{2}\log\begin{vmatrix}\boldsymbol{R} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{\Sigma}\end{vmatrix},$$

とまとめることができる。これを見ると，識別問題を引き起こしているランク落ちしたデザイン行列$\boldsymbol{Z}$の下に単位行列$\boldsymbol{E}$が補われていることにより，HAPC, BAPCモデルとも，少なくとも“識別不足”は解消していることがわかる。

11 パラメータの直線成分と曲線成分

(8) の未知の真値パラメータ$\boldsymbol{\beta}_0^A$の要素$\{\beta_{0,1}^A, \dots, \beta_{0,I}^A\}$の変化のトレンドを直線成分と呼ぶことにし，$\boldsymbol{\beta}_0^{A[\mathrm{L}]}$で表す。具体的には中心化インデックベクトルに対して仮想的に単回帰分析を行い，傾き係数$s_0^A = \{(\boldsymbol{n}_I^*)'\boldsymbol{n}_I^*\}^{-1}(\boldsymbol{n}_I^*)'\boldsymbol{\beta}_0^A$を得て，$\boldsymbol{\beta}_0^{A[\mathrm{L}]} = s_0^A\boldsymbol{n}_I^*$，とする。曲線成分$\boldsymbol{\beta}_0^{A[\mathrm{C}]}$は残差にあたり，$\boldsymbol{\beta}_0^{A[C]} = \boldsymbol{\beta}_0^A - \boldsymbol{\beta}_0^{A[\mathrm{L}]}$，で与えられ，$\boldsymbol{\beta}_0^A$の要素の変化が直線成分$\boldsymbol{\beta}_0^{A[\mathrm{L}]}$と曲線成分$\boldsymbol{\beta}_0^{A[C]}$の和に分解できることになる。

(8) のダガーパラメータに代入すると，

$$\boldsymbol{\beta}_\dagger^A = (\boldsymbol{\beta}_0^{A[\mathrm{L}]} + \boldsymbol{\beta}_0^{A[C]}) + s\boldsymbol{n}_I^* = (s_0^A + s)\boldsymbol{n}_I^* + \boldsymbol{\beta}_0^{A[C]},$$

となる。時代効果，コウホート効果についても同様に考えて，

$$\boldsymbol{\beta}_\dagger^P = (s_0^P - s)\boldsymbol{n}_J^* + \boldsymbol{\beta}_0^{P[C]}, \quad \boldsymbol{\beta}_\dagger^C = (s_0^C + s)\boldsymbol{n}_K^* + \boldsymbol{\beta}_0^{C[C]},$$

が得られる。

12 HAPCモデルの問題点

簡明のために$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{E}$（単位行列）ととると，$\boldsymbol{b}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}'\boldsymbol{b}$であり，HAPCモデルの場合，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}'\boldsymbol{b} &= (s_0^A + s)^2(\boldsymbol{n}_I^*)'\boldsymbol{n}_I^* + (s_0^P - s)^2(\boldsymbol{n}_J^*)'\boldsymbol{n}_J^* \\ &\quad + (s_0^C + s)^2(\boldsymbol{n}_K^*)'\boldsymbol{n}_K^* + (\text{曲線成分の項}),\end{aligned}$$

となる。日本人の国民性調査を念頭において，$I = 10$, $J = 13$, $K = I + J - 1 = 22$とすると，(A6) より，

$$(\boldsymbol{n}_I^*)'\boldsymbol{n}_I^* = 82.5, \ (\boldsymbol{n}_J^*)'\boldsymbol{n}_J^* = 182, \ (\boldsymbol{n}_K^*)'\boldsymbol{n}_K^* = 885.5,$$

となっている。一般に$K > I, J$であり，$(\boldsymbol{n}_K^*)'\boldsymbol{n}_K^*$が相対的にかなり大きくなるので，$(s_0^C + s)^2(\boldsymbol{n}_K^*)'\boldsymbol{n}_K^*$を小さくする圧力がかかり，$(s_0^C + s)^2 \to 0$として，コウホート効果の直線成分を不定部分も含めて小さくする推定値が得られることになる。HAPCモデルがコウホート効果のトレンドを水平傾向にするとの指摘があったが，その機序を説明している。

一方，BAPCモデルの場合，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}'\boldsymbol{b} &= (s_0^A + s)^2(I-1) + (s_0^P - s)^2(J-1) \\ &\quad + (s_0^C + s)^2(K-1) + (\text{曲線成分の項})\end{aligned}$$

であり，HAPCモデルに比べて，コウホート効果の直線成分を選択的に押さえる圧力はかなり小さいことがわかる。

両者の推定値の違いを，坂口・中村（2019）は，男性大学卒の割合（日本人の国民性調査）について例示している。HAPCモデルの結果では，コウホート効果のトレンド（直線成分）は水平傾向にあり，年齢効果と時代効果が立ち上がっていた。一方のBAPCモデルの結果では，コウホート効果が立ち上がり，年齢効果は見られず，時代効果にわずかな上昇トレンドがあるという結果になっている。

13 おわりに

コウホート分析における識別問題の克服は，問題の源泉である3効果のパラメータの線形成分の不定性の制御が鍵である。BAPCモデル（中村，1982）は，その制御を，節約原理を実現するパラメータの漸進的変化の条件（1次階差制約）を取り入れることにより実現している。

BAPCモデルは，一般化線形モデルGLMに赤池流経験ベイズモデリングを行ったものと解釈されるが，個票データを対象とするHAPCモデル（Yang and Land, 2006）の登場により，一般化線形混合モデル（generalized linear mixed model, GLMM）として比較できることとになった。

BAPCモデルでは，すでに年齢×時代の交互作用効果を扱っており（中村，2005），性別×年齢，性別×時代，性別×コウホートによる交互作用効果を扱うモデルの開発も進めている。個票データへの適用を考えれば，性別・年齢・時代・コウホート要因以外の諸要因を取り入れたモデルによる分析も可能である。年齢・時代・コウホート要因を扱うときには，どのような場合でも1次階差制約とモデル選択が必須

である。

最後に，社会の変化の構造に迫るコウホート分析は，継続調査データの存在が前提である。継続調査の益々の発展を願う。

（付録A）記法

a次元ベクトルの集合を$\mathbb{R}^a$，大きさ$a\times b$の行列の集合を$\mathbb{R}^{a\times b}$とする。

すべての要素が0のベクトルを$\mathbf{0}_a\in\mathbb{R}^a$で，行列（ゼロズ行列）を$\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}_{a\times b}\in\mathbb{R}^{a\times b}$で表す。また，すべての要素が1のベクトルを$\mathbf{1}_a\in\mathbb{R}^a$で表す。単位行列は$\boldsymbol{E}_a$で表す。

反単位行列を$\check{\boldsymbol{E}}_a$で表す。

$$\check{\boldsymbol{E}}_a=\begin{bmatrix} & & 1\\ & \iddots & \\ 1 & & \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{a\times a},\quad \check{\boldsymbol{E}}_a\mathbf{1}_a=\mathbf{1}_a,$$

である。右側にゼロズ行列を補った拡張反単位行列を$\check{\boldsymbol{E}}_{a\times b}$と書く。

$$\check{\boldsymbol{E}}_{a\times b}=[\check{\boldsymbol{E}}_a\quad \boldsymbol{O}_{a\times(b-a)}]\in\mathbb{R}^{a\times b}\quad(b\geq a),\tag{A1}$$

である。

べキ零行列であるシフト行列$\boldsymbol{N}_a$を，

$$\boldsymbol{N}_a=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \boldsymbol{E}_{a-1}\\ 0 & \mathbf{0}'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1\\ & & & & 0\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{a\times a},\tag{A2}$$

とする。

$$\boldsymbol{N}_a^0=\boldsymbol{E}_a,\qquad \boldsymbol{N}_a^a=\boldsymbol{O}_a,$$

である。$\boldsymbol{N}_a$を右からかけると列が右にシフトし，左からかけると行が上にシフトする。

インデックスベクトルを，

$$\boldsymbol{n}_a=[1,2,\dots,a]'\in\mathbb{R}^a,\tag{A3}$$

で表す。$b\geq a\geq 1$のとき，$\boldsymbol{n}_{a:b}=[a,a+1,\dots,b]'\in\mathbb{R}^{b-a+1}$と書く。$\boldsymbol{n}_a=\boldsymbol{n}_{1:a}$である。$a\geq b\geq 1$のときは，$\boldsymbol{n}_{a:-1:b}=[a,a-1,\dots,b]'\in\mathbb{R}^{a-b+1}$と書く。

$$\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{a}:-\mathbf{1}:\boldsymbol{b}}=(\boldsymbol{a}+1)\mathbf{1}_{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\mathbf{1}}-\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\mathbf{1}},\tag{A4}$$

である。

中心化したインデックスベクトルを，

$$\boldsymbol{n}_a^*=\boldsymbol{n}_a-\{(a+1)/2\}\mathbf{1}_a\in\mathbb{R}^a,\tag{A5}$$

で表す。$\mathbf{1}_a'\boldsymbol{n}_a^*=0$,

$$(\boldsymbol{n}_a^*)'\boldsymbol{n}_a^*=a(a^2-1)/12,\tag{A6}$$

である。

（付録B）行列の積み上げ――直和とクロネッカ積

行列$\boldsymbol{X}_j$ $(j=1,\dots,b)$の直和は，

$$\boldsymbol{X}_1\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{X}_b=\bigoplus_{j=1}^b\boldsymbol{X}_j=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{X}_b\end{bmatrix},$$

と定義される。行列$\boldsymbol{Y}_j$ $(j=1,\dots,b)$があるとき，行列の大きさが整合していれば，

$$(\oplus_j\boldsymbol{X}_j)(\oplus_j\boldsymbol{Y}_j)=\oplus_j\boldsymbol{X}_j\boldsymbol{Y}_j,$$

$$(\oplus_j\boldsymbol{X}_j)+(\oplus_j\boldsymbol{Y}_j)=\oplus_j(\boldsymbol{X}_j+\boldsymbol{Y}_j),$$

である。$\boldsymbol{X}_j$がすべて同一のときは（$\boldsymbol{X}_j=\boldsymbol{Z}$として），

$$\bigoplus_{j=1}^b\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Z} & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{Z}\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}_b\otimes\boldsymbol{Z},$$

とクロネッカ積を用いても書ける。

クロネッカ積は左側の行列の要素に右側の行列を埋め込んで大きな行列を作る操作と考えてよい。行列の大きさが整合していれば，$(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})(\boldsymbol{C}\otimes\boldsymbol{D})=\boldsymbol{AC}\otimes\boldsymbol{BD}$である。

以下，行列$\boldsymbol{X}_j\in\mathbb{R}^{a\times c}$ $(j=1,\dots,b)$の大きさを同一とし，これらb個を縦方向に積み上げた行列は，

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{X}_b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{X}_b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_c\\ \vdots\\ \boldsymbol{E}_c\end{bmatrix}=(\oplus_j\boldsymbol{X}_j)(\mathbf{1}_b\otimes\boldsymbol{E}_c)\in\mathbb{R}^{ab\times c},$$

と行列の直和とクロネッカ積を使って書ける。$\boldsymbol{X}_j$がすべて同一のときは（$\boldsymbol{X}_j=\boldsymbol{Z}$として），

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}\\ \vdots\\ \boldsymbol{Z}\end{bmatrix}=\mathbf{1}_b\otimes\boldsymbol{Z}=(\boldsymbol{E}_b\otimes\boldsymbol{Z})(\mathbf{1}_b\otimes\boldsymbol{E}_c)=(\oplus_j\boldsymbol{Z})(\mathbf{1}_b\otimes\boldsymbol{E}_c),$$

である。

つぎに，行列$\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{d\times a}$に対しては，

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\boldsymbol{AX}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{AX}_b\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{A}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{X}_b\end{bmatrix}\\ &=(\boldsymbol{E}_b\otimes\boldsymbol{A})(\oplus_j\boldsymbol{X}_j)(\mathbf{1}_b\otimes\boldsymbol{E}_c)\\ &=(\oplus_j\boldsymbol{A})(\oplus_j\boldsymbol{X}_j)(\mathbf{1}_b\otimes\boldsymbol{E}_c)\\ &=(\oplus_j\boldsymbol{AX}_j)(\mathbf{1}_b\otimes\boldsymbol{E}_c)\in\mathbb{R}^{bd\times c},\end{aligned}$$

となる。

また，行列$\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{c \times e}$を右からかけると，縦積みのブロック行列の表記からは一目瞭然ではあるが，

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{X}_b \end{bmatrix} \boldsymbol{B} = (\oplus_j \boldsymbol{X}_j)(\mathbf{1}_b \otimes \boldsymbol{E}_c)\boldsymbol{B}$$
$$= (\oplus_j \boldsymbol{X}_j \boldsymbol{B})(\mathbf{1}_b \otimes \boldsymbol{E}_e) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \boldsymbol{B} \\ \vdots \\ \boldsymbol{X}_b \boldsymbol{B} \end{bmatrix}, \tag{B1}$$

と$\boldsymbol{B}$が各ブロックに潜り込む。

（付録C）階差ベクトル・階差行列

ベクトル$\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_a]' \in \mathbb{R}^a$の階差（隣り合う要素の差）を生成する行列（階差行列）は，

$$\boldsymbol{D}_a = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(a-1)\times a}$$

で与えられ，得られる階差ベクトルは，

$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{D}_a \boldsymbol{\beta} = [\beta_1 - \beta_2, \dots, \beta_{a-1} - \beta_a]'$，である。

階差行列$\boldsymbol{D}_a$の一般逆行列（の1つ）は，

$$\boldsymbol{D}_a^- = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ & & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_{a-1} \\ \mathbf{0}'_{a-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{a \times (a-1)},$$

で与えられる。$\boldsymbol{D}_a \boldsymbol{D}_a^- = \boldsymbol{E}_{a-1}$であるから，一般逆行列の条件$\boldsymbol{D}_a \boldsymbol{D}_a^- \boldsymbol{D}_a = \boldsymbol{D}_a$を確かに満たしている。

連立1次方程式$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$の一般解は，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^- \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$のとき，$\boldsymbol{x}$と同じ次元の任意のベクトル$\boldsymbol{\xi}$に対して，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^- \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^- \boldsymbol{A})\boldsymbol{\xi}$と求まる。$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D}_a, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$ととれば，

$$\boldsymbol{D}_a^- \boldsymbol{D}_a = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_{a-1} & -\mathbf{1}_{a-1} \\ \mathbf{0}'_{a-1} & 0 \end{bmatrix}$$

より，

$$\boldsymbol{E}_a - \boldsymbol{D}_a^- \boldsymbol{D}_a = [\boldsymbol{O}_{a \times (a-1)} \quad \mathbf{1}_a], \tag{C1}$$

である。

文献

Akaike, H., 1980, “Likelihood and the Bayes procedure”, *Bayesian Statistics* (Eds. Bernardo, J.M., et al.), 143-166. Valencia: University Press.

Bell, A. and Jones, K., 2014, “Another ‘futile quest’? A simulation study of Yang and Land’s hierarchical age-period-cohort model”, *Demographic Research*, 30(11): 333-360.

Blalock, H. M. Jr., 1967, “Status inconsistency, social mobility, status integration and structural effects”, *American Sociological Review*, 32(5): 790-801.

Fienberg, S. E. and Mason, W. M. (Eds.), 1985, *Cohort Analysis in Social Research: Beyond the Identification Problem*, Springer-Verlag.

Fu, W., 2018, *A Practical Guide to Age-Period-Cohort Analysis: The Identification Problem and Beyond*, CRC Press.

福田勝洋, 2002,「コップの中の嵐『cohort』の訳語」『日本公衆衛生学雑誌』, 49(8): 802-803.

統計数理研究所国民性調査委員会, 1982,『第4日本人の国民性』出光書店.

Glenn, N.D., 2005, *Cohort Analysis*, 2nd ed. Sage.

中村 隆, 1982,「ベイズ型コウホート・モデル ―― 標準コウホート表への適用」『統計数理研究所彙報』29(2): 77-97.

中村 隆, 2005,「コウホート分析における交互作用効果モデル再考」『統計数理』53 (1) : 103-132.

中村 隆, 2018,「反復横断調査とコウホート分析」『社会言語科学の源流を追う』(横山詔一他編), ひつじ書房.

O’Brien, R.M., 2015, *Age-Period-Cohort Models: Approaches and Analyses with Aggregated Data*, CRC Press.

Ryder, N.B., 1965, “The cohort as a concept in the study of social change”, *American Sociological Review*, 30(6): 843-861.

坂口尚文，中村 隆, 2019,「混合効果モデルとして

みたコウホート分析モデル」『理論と方法』33(掲載予定).

重松 逸造, 2002,「“コップの中の嵐『cohort』の訳語”を読んで」『日本公衆衛生学雑誌』, 49(10):1128.

Yang, Y. and Land, K. C., 2006, “A mixed models approach to the age-period-cohort analysis of repeated cross-section surveys, with an application to data on trends in verbal test scores”, *Sociological Methodology*, 36(1): 75-97.

———, 2013, *Age-Period-Cohort Analysis: New Models, Methods, and Empirical Applications*. CRC Press.

安田 三郎, 1969,『社会統計学』丸善.